Question :

(Ecrit de la Banque de France 2008)

Déterminer, en fonction des paramètres, les points critiques, les extremums et les points selles des fonctions suivantes :

1) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

2) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$g(x,y) = \frac{x^2}{\alpha^2 - 1} + \frac{2xy}{\alpha\beta - 1} + \frac{y^2}{\beta^2 - 1}$$

avec $(\alpha, \beta) \in]1, +\infty[^2$.

[0] © 2010, Dany-Jack Mercier, tous droits réservés. Site internet MegaMaths.

Réponse :

Il s'agit de l'exercice n° 2 du concours d'Attaché de Direction de la Banque de France, session 2008, épreuve dominante.

1) • Les points critiques de f sont ceux qui annulent les dérivées partielles premières de f. Le point $M(x,y)$ est donc critique si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3ay = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$$

autrement dit si :

$$(S) \quad \begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = ax. \end{cases}$$

Comme $(S) \Rightarrow x^4 = a^2y^2 = a^3x \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = a)$, on envisage deux cas :

- Si $x = 0$, (S) donne $y = 0$, donc $O(0,0)$ est un point critique.

- Si $x = a$, et si $a \neq 0$, (S) s'écrit :

$$\begin{cases} a^2 = ay \\ y^2 = a^2 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} y = a \\ y = \pm a, \end{cases}$$

et l'on obtient le point critique $A(a,a)$.

• Pour étudier f en un point critique $M_0(x_0,y_0)$, on écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en ce point :

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)(h,k)^2 + o(\|(h,k)\|^2),$$

et l'on étudie la forme quadratique $q(h,k) = \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)(h,k)^2$, qui s'écrit :

$$q(h,k) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\,hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\,k^2\right).$$

Ici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3a \ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$$

donc $q(h,k) = 3x_0h^2 - 3ahk + 3y_0k^2$. Voyons ce que cela donne en chacun des points critiques de f :

α) Au point $O(0,0)$,

$$q(h,k) = -3ahk = -3a \times \frac{1}{4}\left[(h+k)^2 - (h-k)^2\right].$$

- Si $a \neq 0$, la signature de q est $(1,1)$, donc f n'admet pas d'extremum relatif en O. Le point O est un point selle de f.

- Si $a = 0$, $q(h,k) = 0$ et l'on ne peut rien dire si l'on se contente d'utiliser la formule de Taylor à l'ordre 2. Il faut trouver autre chose...

[0] © 2010, Dany-Jack Mercier, tous droits réservés. Site internet MegaMaths.

Ici $f(x,y) = x^3 + y^3$ donc $f(x,0) = x^3$, et l'on voit que $f(x,0)$ est supérieur ou inférieur à $f(0,0) = 0$ suivant le signe de x. La fonction f n'admet donc pas d'extremum relatif en O. De plus $f(0,y) = y^3$ est aussi supérieur ou inférieur à $f(0,0) = 0$ suivant le signe de y, donc O n'est même pas un point selle pour f.

β) Au point $A(a,a)$:

- Si $a = 0$, le cas a déjà été examiné en α).

- Si $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} q(h,k) = 3a(h^2 - hk + k^2) &= 3a\left[\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k^2\right] \\ &= 3a\left[\left(h - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}\right] \end{aligned}$$

donc q est de signature $(2,0)$. C'est une forme quadratique définie positive, et le cours nous permet d'affirmer que f admet un minimum local en A.

2) • On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{\alpha^2 - 1} + \dfrac{2y}{\alpha\beta - 1} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x}{\alpha\beta - 1} + \dfrac{2y}{\beta^2 - 1} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha^2 - 1} + \dfrac{y}{\alpha\beta - 1} = 0 \\ \dfrac{x}{\alpha\beta - 1} + \dfrac{y}{\beta^2 - 1} = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système linéaire de deux équations à deux inconnues est :

$$\Delta = \frac{1}{(\alpha^2 - 1)\left(\beta^2 - 1\right)} - \frac{1}{(\alpha\beta - 1)^2} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{(\alpha^2 - 1)\left(\beta^2 - 1\right)(\alpha\beta - 1)^2}.$$

- Si $\alpha = \beta$, $\Delta = 0$ et le système (S) se réduit à la seule équation $x + y = 0$. Toute la droite D d'équation $y = -x$ est formée de points critiques pour g.

- Si $\alpha \neq \beta$, (S) est un système homogène de Cramer, donc ne possède que la solution triviale $(0,0)$. Ici, $O(0,0)$ est le seul point critique de g.

• **Etude de g en ses points critiques** : on conserve les notations de la première question. Ici :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{\alpha^2 - 1} \ ; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2}{\alpha\beta - 1} \ ; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{\beta^2 - 1}$$

donc :

$$\begin{aligned} q(h,k) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha^2 - 1}h^2 + 2 \times \frac{2}{\alpha\beta - 1}hk + \frac{2}{\beta^2 - 1}k^2\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2 - 1}h^2 + \frac{2}{\alpha\beta - 1}hk + \frac{1}{\beta^2 - 1}k^2. \end{aligned}$$

Réduisons la forme quadratique q en utilisant la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned} q(h,k) &= \frac{1}{\alpha^2-1}\left[h^2+\frac{2\left(\alpha^2-1\right)}{\alpha\beta-1}hk\right]+\frac{1}{\beta^2-1}k^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2-1}\left[\left(h+\frac{\alpha^2-1}{\alpha\beta-1}k\right)^2-\frac{\left(\alpha^2-1\right)^2}{(\alpha\beta-1)^2}k^2\right]+\frac{1}{\beta^2-1}k^2 \\ &= \frac{1}{\alpha^2-1}\left(h+\frac{\alpha^2-1}{\alpha\beta-1}k\right)^2-\frac{\alpha^2-1}{(\alpha\beta-1)^2}k^2+\frac{1}{\beta^2-1}k^2. \end{aligned}$$

Après simplifications, on obtient :

$$q(h,k)=\frac{1}{\alpha^2-1}\left(h+\frac{\alpha^2-1}{\alpha\beta-1}k\right)^2+\frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha\beta-1)^2\left(\beta^2-1\right)}k^2.$$

D'où la discussion :

- Si $\alpha=\beta$, la forme quadratique q est dégénérée, et l'on ne peut pas conclure en l'utilisant. Mais la quantité

$$g(x,y)=\frac{1}{\alpha^2-1}\left(x^2+2xy+y^2\right)=\frac{(x+y)^2}{\alpha^2-1}$$

reste supérieure à $g(x,-x)=0$ quels que soient x et y. Les points de la droite D d'équation $y=-x$ sont donc tous des minimums globaux.

- Si $\alpha\neq\beta$, q est définie positive, donc g admet un minimum relatif en O.